Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 5.7.2019, 18:00

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sind von jeder/m Studierenden *einzeln* zu bearbeiten und abzugeben (Plagiate werden entsprechend der Studienordnung geahndet).
- Bitte reichen Sie ihren Programmcode sowie die erzeugten Plot bis **5/7/2019, 18:00** unter `wr@isg.cs.uni-magdeburg.de` ein.
- *Hinweis: In diesem Aufgabenblatt dürfen Sie alle Numpy und Pyplot Funktionen verwenden.*

In diesem Aufgabenblatt wird die Lösung der Wärmegleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}$$

für $x \in [0, 2\pi]$ und mit periodischen Randbedingungen bestimmt. Als Anfangsbedinung verwenden wir

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} .$$

Wir werden einen spektralen Ansatz zur Lösung verwenden.

1.) Fourierserien-Darstellung der Anfangsbedingungen. (5 Punkte)

i.) Bestimmen Sie die Fourierserien-Darstellung $u_k(0)$ der Anfangsbedingungen.

ii.) Plotten Sie die Koeffizienten $u_k(0)$ in der kanonischen Darstellung mit der Frequenz $k = 0$ zentriert (Sie können hierzu `np.fft.fftshift()` verwenden).

2.) Bestimmung der Lösung der Wärmegleichung. (10 Punkte)

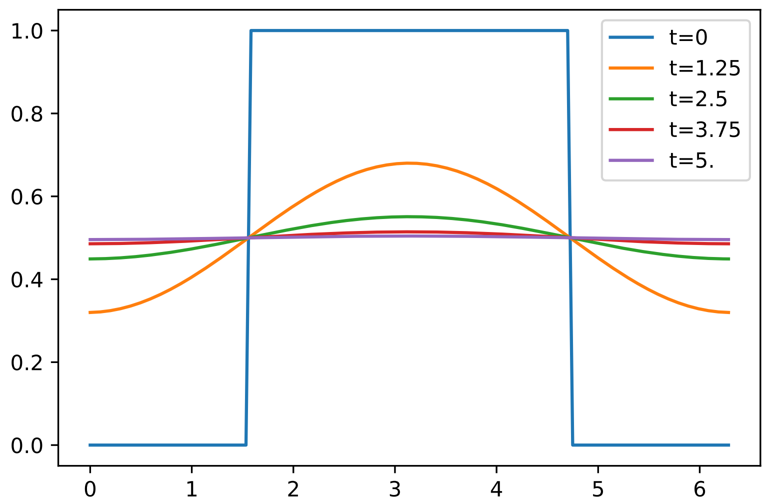

Figure 1: Ergebnis der Simulation zu verschiedenen Zeitpunkten.

i.) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $u_k(t_i)$ für 100 Zeitpunkte zwischen $t_0 = 0$ und $t_{\max} = 5$, so dass sie in etwa die Beispielanimation auf der Kurs-Webseite reproduzieren können (d.h. im letzten Zeitschritt sollte in etwa die asymptotische Lösung erreicht wurden sein und die dazwischen liegenden Zeitschritte sollen eine glatte Interpolation in der Zeit ermöglichen.)

ii.) Plotten Sie $u(x, t)$ zu $t = \{1/4t_{\max}, 1/2t_{\max}, 3t_{\max}/2, t_{\max}\}$, in einem Graphen, siehe Abb. 1.

3.) Bestimmung der Lösung der Wärmegleichung mit dem expliziten Euler-Verfahren. (5 Punkte)

i.) Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren für die Wärmegleichung.

ii.) Plotten Sie die Lösung zu $t = 2.5$ für einen Zeitschritt $dt = 0.001$, $dt = 0.0005$, $dt = 0.0001$ zusammen mit Lösung mit der analytischen Zeitintegration aus Aufgabe 2.