Wissenschaftliches Rechnen

Aufgabenblatt 3 (Praxis)

wr@isg.cs.uni-magdeburg.de

SoSe 2019

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sind von jeder/m Studierenden *einzeln* zu bearbeiten und abzugeben (Plagiate werden entsprechend der Studienordnung geahndet).
- Verwenden Sie den vorgegebenen Skelett-Code. Die zu implementierenden Funktionen befinden sich in der Datei **main.py**. Ihr Code ist an den mit `# TODO: ...` gekennzeichneten Stellen einzufügen. Die `NumPy`-Funktionen, welche Sie zur Lösung einer Aufgabe nicht verwenden dürfen, sind unter `Forbidden` in der Docstring Beschreibung der entsprechenden Funktion aufgelistet.
- Wir stellen *optional* einige rudimentäre Unit-Tests zur Verfügung, welche Sie verwenden können, um die Funktionalität ihres Codes zu testen (in der zur Verfügung gestellten Form sind diese nicht ausreichend, um die tatsächlich geforderte Funktionalität zu überprüfen). Sie sollten diese Tests während der Implementierung Ihrer Lösung vervollständigen (schlagen Sie ggf. die Funktionalität der Python `unittest` Klasse nach). Sie können die Tests mit dem Aufruf `python3 tests.py -v [Tests.test_<function>]` ausführen.
- Bitte reichen Sie `main.py` mit Ihrem Lösungen bis **Donnerstag, den 25.6.2018, um 13:00 Uhr** unter obiger Emailadresse ein.

Es gelten die Konventionen und die Notation der Übungsblatter 9, 10 und 11, insbesondere bzgl. der diskreten Fourier Transformation.

Aufgabe 1: Diskrete Fouriertransformation (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die diskrete Fouriertransformation (DFT) mit Hilfe der DFT-Matrix realisiert werden.

Aufgabe 1.1: DFT Matrix (2 Punkte)

Implementieren Sie die Funktion `dft_matrix()`, welche die DFT-Matrix der Größe $n \times n$ zurückgeben soll.

Aufgabe 1.2: Überprüfung Unitäre Matrix (1 Punkt)

Implementieren Sie die Funktion `is_unitary()`, welche überprüft, ob das Argument bis auf Skalierung eine unitäre Matrix ist (d.h. $F^*F = N \cdot I$ wobei F^* die konjugiert-transponierte von F ist und $F \in \mathbb{R}^{N \times N}$).

Aufgabe 1.3: DFT von δ-Impulsen (1 Punkt)

Berechnen Sie in der Funktion `create_harmonics()` mit Hilfe der DFT-Matrix die diskrete Fouriertransformation von diskreten δ-Impulsen der Form $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ für welche das i-te Element 1 ist und alle anderen Null sind. Die Gesamtlänge von e_i soll 128 betragen. Vergleichen Sie die Visualisierung der Signale durch `plot_harmonics()` mit Abb. 1.

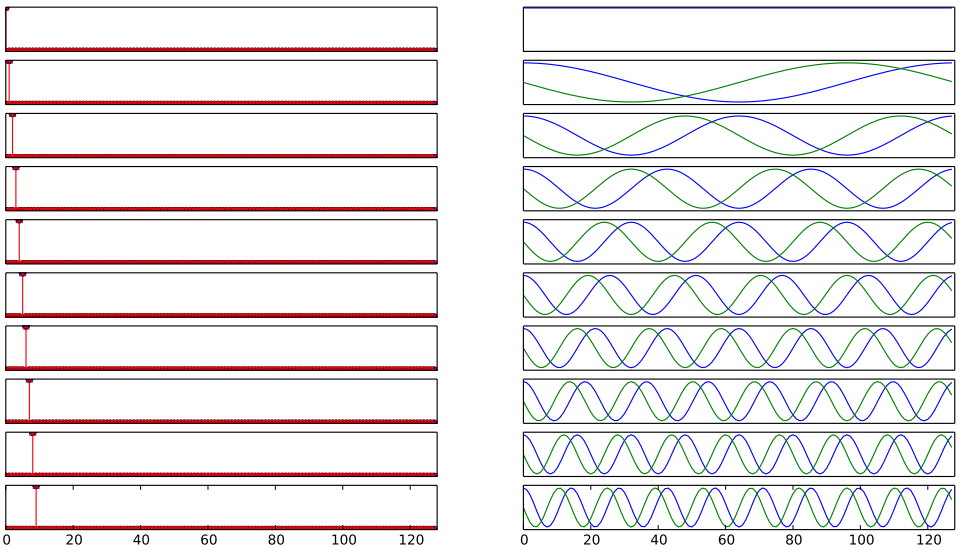


Abbildung 1: Graphische Ausgabe der Funktion `plot_harmonics()`.

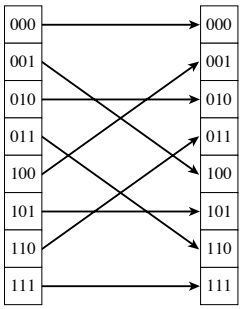
Aufgabe 2: Schnelle Fourier Transformation (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Cooley-Tukey Variante der schnellen Fouriertransformation (FFT) für Eingangsdaten der Länge 2^k implementiert werden.

Aufgabe 2.1: Umordnung der Eingangsdaten (1 Punkt)

Implementieren Sie die Funktion `shuffle_bit_reversed_order()`, welche die Elemente eines gegebenen Arrays so umordnet, dass der neue Index für ein Element durch die Umkehrung der Bitdarstellung des alten Index entsteht.

Für ein Array der Länge 8 sieht diese Umordnung zum Beispiel folgendermaßen aus (links vor dem Umordnen und rechts danach):[1]



Aufgabe 2.2: Schnelle Fourier Transformation (3 Punkte)

Implementieren Sie die FFT in der Funktion `fft()`. Die FFT verwendet implizit einen Baum, welcher von den Blättern, gegeben durch die umgeordneten Elemente der Eingangsdaten, zur Wurzel hin verarbeitet wird. Das Ergebnis ist die gesuchte Fouriertransformation.

Nummerieren wir die Ebenen des Baumes von den Blättern beginnend mit $m = 0$, so erfolgen auf jeder Ebene 2^{m+1} diskrete Fouriertransformationen der Länge 2^m. Jede dieser Fouriertransformationen wird

[1] Aus: Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. New York, NY, USA: Cambridge University Press.

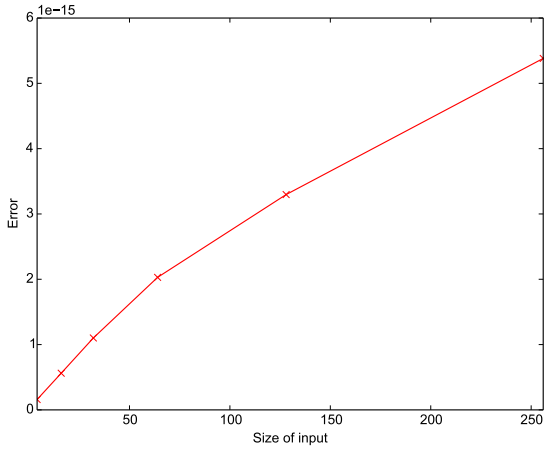


Abbildung 2: Fehler zwischen originalem Signal und vor- und rückwärts transformiertem Signal mit der FFT.

aus elementaren Transformation für zwei Elemente aufgebaut:

$$p = e^{-2\pi ik/2^m} f[j] \tag{1a}$$
$$f[j] = f[i] - p \tag{1b}$$
$$f[i] = f[i] + p \tag{1c}$$

wobei der Faktor $e^{-2\pi ik/2^m}$ den korrekten Frequenzanteil für das Ergebnis bestimmt. Die aktuellen Werte in f enthalten dabei für $m = 0$ die umsortierten Eingangsdaten und für höhere Ebenen im Baum die Ergebnisse der Fouriertransformationen, welche auf tieferliegenden Schichten des Baumes berechnet wurden. Der Abstand von i und j ist durch 2^m gegeben, und i läuft über $k, k+2^{m+1}, k+2\cdot 2^{m+1}, \ldots$. Daraus folgt, dass immer weiter auseinanderliegende Elemente zusammengefasst werden, desto höher man im Baum gelangt. Für eine Fouriertransformation der Länge m muss die Frequenzvariable k von 0 bis 2^m laufen. Aus Effizienzgründen werden auf jeder Ebene des Baumes dabei für jedes k die $n/2^m$ elementaren Transformationen in Gleichung 1 ausgeführt bevor k erhöht wird. Es erfolgt also eine Umordnung der beiden innersten Schleifen. In Pseudo-Code haben wir damit also:

```
# for all levels of the tree

  # for all values of k = 0 \ldots 2^m on the current level

    # compute omega factor for current k

    # for all values of i,j with $i = k \cdots n / 2^m$

      # perform elementary transformation
```

Der Ablauf der FFT für ein Signal der Länge 8 ist im Anhang gezeigt. Vergleichen Sie mit Hilfe des zur Verfügung gestellten Test-Codes die Abweichung eines Signals nach Vor- und Rücktransformation (siehe Abb. 2) sowie die Rechenzeit, welche Sie mit `dft_matrix()` und mit `fft()` benötigen (siehe Abb. 3).

Aufgabe 3: Verarbeitung von Audiosignalen (2 Punkte)

Aufgabe 3.1: Tonerzeugung (1 Punkt)

Erzeugen sie in der Funktion `generate_tone()` ein mittleres C (f = 261.63 Hz). Der zur Verfügung gestellte Test-Code speichert den von Ihnen zurückgegebenen Ton in `data/mid-c.wav`. Zum Vergleich ist die Datei `data/mid-c_ref.wav` gegeben.

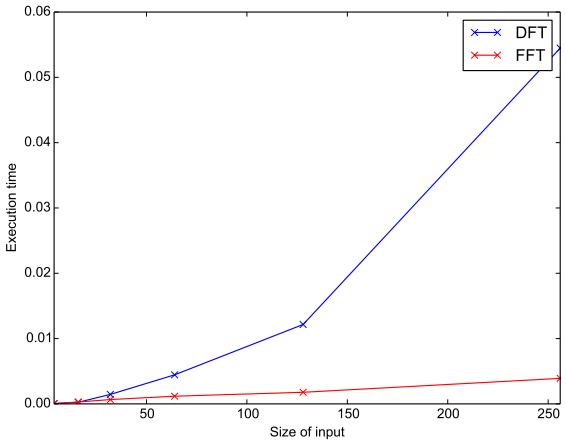


Abbildung 3: Vergleich der benötigten Rechenzeit zur Bestimmung einer diskreten Fouriertransformation mit Hilfe von `dft_matrix()` und `fft()`.

Aufgabe 3.2: Tiefpassfilter (1 Punkt)

In der Funktion `low_pass_filter()` soll ein einfacher Tiefpassfilter implementiert werden, welcher die hohen Frequenzen eines gegebenen Signals unterdrückt. Um den Filter zu realisieren soll:

a) die Fourierdarstellung des Signals berechnet werden,

b) die hohen Frequenzen über 5000 Hz in der Frequenzdarstellung auf Null gesetzt werden,

c) das Signal aus dem Frequenzraum wieder in den Ortsraum transformiert werden.

Der zur Verfügung gestellte Test-Code speichert das von Ihnen gefilterte Signal in `data/speech-filtered.wav`. Vergleichen sie dieses mit der vorgegebenen Datei `data/speech-filtered_ref.wav`.

Anhang: Beispiel für FFT Ablauf

Für jedes Quadrupel (m, k, i, j) wird eine der elementaren Transformationen in Gleichung 1 ausgeführt:

Eingangsdaten:
[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8]

Nach Shuffle:
[0.1+0.j 0.5+0.j 0.3+0.j 0.7+0.j 0.2+0.j 0.6+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 0 , j = 1
[0.6+0.j -0.4+0.j 0.3+0.j 0.7+0.j 0.2+0.j 0.6+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 2 , j = 3
[0.6+0.j -0.4+0.j 1.0+0.j -0.4+0.j 0.2+0.j 0.6+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 4 , j = 5
[0.6+0.j -0.4+0.j 1.0+0.j -0.4+0.j 0.8+0.j -0.4+0.j 0.4+0.j 0.8+0.j]

m = 0 , k = 0 : i = 6 , j = 7
[0.6+0.j -0.4+0.j 1.0+0.j -0.4+0.j 0.8+0.j -0.4+0.j 1.2+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 0 : i = 0 , j = 2
[1.6+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j 0.8+0.j -0.4+0.j 1.2+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 0 : i = 4 , j = 6
[1.6+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j 2.0+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 1 : i = 1 , j = 3
[1.6+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j 2.0+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j -0.4+0.j]

m = 1 , k = 1 : i = 5 , j = 7
[1.6+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j 2.0+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 0 : i = 0 , j = 4
[3.6+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j -0.4+0.j -0.4+0.4j -0.4+0.j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 1 : i = 1 , j = 5
[3.6+0.j -0.4+0.966j -0.4+0.j -0.4-0.4j -0.4+0.j -0.4-0.166j -0.4+0.j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 2 : i = 2 , j = 6
[3.6+0.j -0.4+0.966j -0.4+0.4j -0.4-0.4j -0.4+0.j -0.4-0.166j -0.4-0.4j -0.4-0.4j]

m = 2 , k = 3 : i = 3 , j = 7
[3.6+0.j -0.4+0.966j -0.4+0.4j -0.4+0.166j -0.4+0.j -0.4-0.166j -0.4-0.4j -0.4-0.966j]