Wissenschaftliches Rechnen

Komplexe Zahlen

wr@isg.cs.uni-magdeburg.de

SoSe 2018

1 Komplexe Zahlen

Die Menge der geordneten Paare (a, b) von reellen Zahlen zusammen mit den beiden Verknüpfungen

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \tag{1a}$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{1b}$$

definiert den Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*. Ist $z = (a, b)$ eine komplexen Zahl, so bezeichnet man mit $\Re(z) := a$ den *Realteil* und mit $\Im(z) := b$ den *Imaginärteil* von z. Identifiziert man jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $(x, 0)$, so kann man $\mathbb{R}$ als Teilkörper der komplexen Zahlen auffassen. Bezeichnet man nun die komplexe Zahl $(0, 1)$ mit i, so gilt $i^2 = -1$ und jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ kann eindeutig in der Form $z = a + bi$ geschrieben werden.

Rechnen mit komplexen Zahlen Beim Rechnen mit komplexen Zahlen kann man (meistens) wie im Reellen verfahren und i^2 durch -1 ersetzen, wenn es auftritt:

Addition:
$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i \tag{2a}$$

Subtraktion
$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c + di = (a - c) + (b - d)i \tag{2b}$$

Multiplikation
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \tag{2c}$$

Division
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \tag{2d}$$

Absolutbetrag Der *Absolutbetrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ist definiert als:

$$|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist also $|z| \geq 0$ und es gilt $|z| = 0$ genau dann wenn $z = 0$ ist. Außerdem gelten die folgenden Rechenregeln:

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

b) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ (für $w \neq 0$)

c) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Konjugation Die zu einer komplexen Zahl $z = a + bi$ *konjugierte* komplexe Zahl ist definiert als:

$$\overline{z} = \overline{a + bi} := a - bi \tag{4}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{\overline{z}} = z$

d) $\overline{z} \cdot z = |z|^2$

Mit Hilfe der konjugierten einer komplexen Zahl $z \neq 0$, lässt sich deren Inverses besonders einfach darstellen:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{5}$$

Außerdem gilt:

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{und} \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}\,, \tag{6}$$

woraus insbesondere folgt, dass $z = \bar{z}$ genau dann gilt, wenn die komplexe Zahl z reell ist, d.h., wenn $\Im(z) = 0$ ist.

Für eine komplexwertige Matrix mit m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n} \tag{7}$$

wird mit

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m} \tag{8}$$

die *konjugiert-transponierte Matrix* von A bezeichnet. Für eine komplexe Zahl z wird daher auch oft die Schreibweise z^* für die Konjugierte verwendet.

2 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus werden für komplexe Zahlen wie im Reellen mittels Reihendarstellung definiert:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{9}$$

Im Reellen konvergieren die Reihen absolut. Für beliebige komplexen Zahlen konvergieren somit auch die Reihen der Real- und Imaginärteile absolut, woraus die absolute Konvergenz im komplexen folgt. Es gilt $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$, wobei $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ die Eulerschen Zahl bezeichnet, und

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) \overset{1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{z^\nu}{\nu!} \frac{w^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \tag{10a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} z^\nu w^{k-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \exp(z + w) \tag{10b}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Für $\exp(z)$ schreibt man daher auch oft e^z.

[1] Satz vom Cauchy-Produkt: Königsberger, Konrad. 2001. Analysis 1. 5th ed. Springer. p. 72.

Zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den komplexen Sinus- und Kosinusfunktionen besteht ein Zusammenhang. Es gilt die *Eulersche Formel*:

$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{k!} \tag{11a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{11b}$$

$$= \cos(z) + i\sin(z) \tag{11c}$$

Aus der Reihendarstellung (9) folgt, dass der Sinus eine ungerade Funktion (d.h., $\sin(z) = -\sin(z)$) und der Kosinus eine gerade Funktion (d.h., $\cos(z) = \cos(-z)$) ist. Entsprechend folgt:

$$\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z) \tag{12}$$

Wir erhalten somit durch Addition bzw. Subtraktion von (11) und (12) die folgenden Darstellungen der Sinus- und Kosinusfunktionen:

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \tag{13a}$$

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \tag{13b}$$

Aus der Eulersche Formel ergibt außerdem eine weitere wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion. Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit der komplexen Periode $2\pi i$, denn für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\exp(z + 2\pi ik) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi ik) \tag{14a}$$

$$= \exp(z) \cdot \big(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)\big) = \exp(z) \cdot (1 + i \cdot 0) = \exp(z) \tag{14b}$$

3 Komplexe Zahlenebene und Polarkooridinaten-Darstellung

Das es sich bei den komplexen Zahlen um Paare von reellen Zahlen handelt, können wir diese als Punkte (bzw. besser Vektoren) in einem zwei-dimensionalen Koordinatensystem graphisch darstellen. Dies erlaubt eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen.

In vielen Fällen ist es dabei einfacher die komplexen Zahlen durch Länge und Winkel, anstatt durch Real- und Imaginärteil, zu beschreiben. Sei $z \neq 0$ eine von Null verschiedene komplexe Zahl und

$$\alpha + \beta i = \frac{z}{|z|}\,. \tag{15}$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $\alpha = \cos(\varphi)$ und $\beta = \sin(\varphi)$ ist. Der Winkel φ wird als das *Argument* der komplexen Zahl z bezeichnet. Wir erhalten so die *Polarkoordinaten-*Darstellung von z:

$$z = |z| \cdot (\alpha + \beta i) \tag{16a}$$

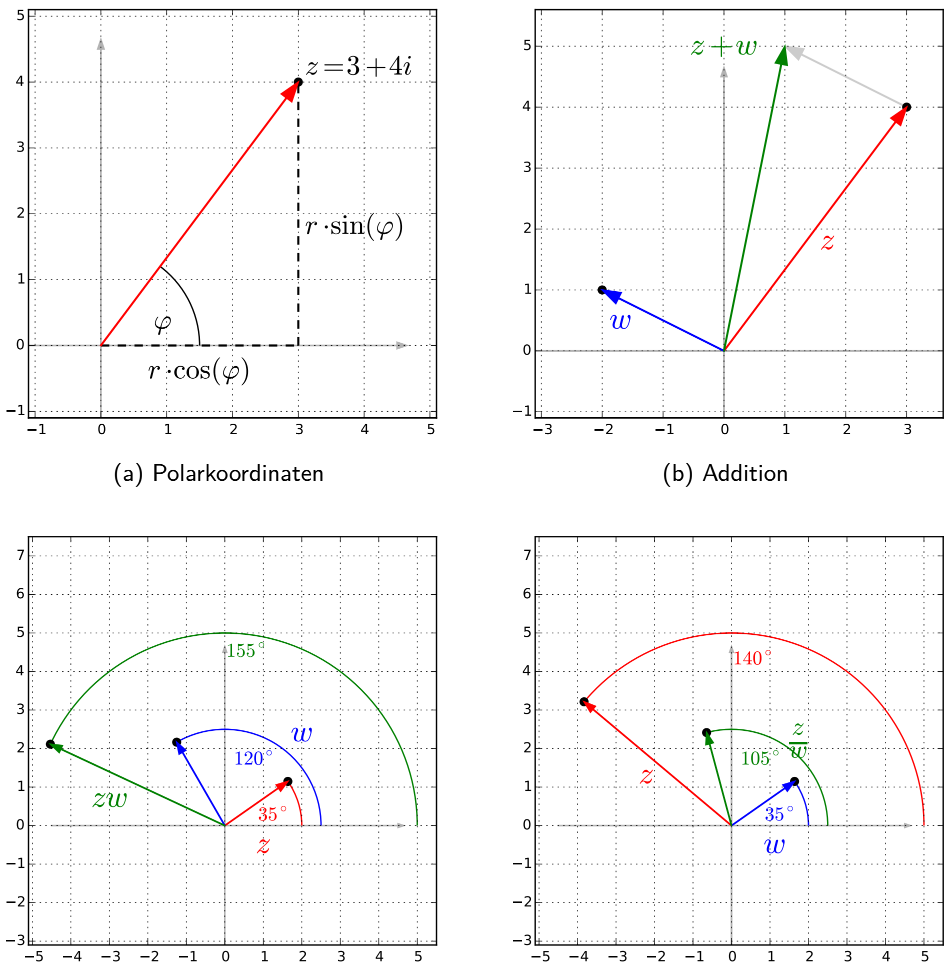
$$= |z| \cdot \big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) = |z| \cdot \exp(i\varphi) = |z|\, e^{i\varphi} \tag{16b}$$

Für den Winkel φ gilt

$$\tan\varphi = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{\beta}{\alpha} \tag{17}$$

und kann daher mit der Umkehrfunktion des Tangents berechnet werden. Dabei muss allerdings darauf geachtet werden die richtige Lösung auszuwählen. Viele Programmiersprachen definieren hierfür die sogenannte `atan2` Funktion, die abhängig vom Quadranten die richtige Lösung auswählt:

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0,\ x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0,\ x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0,\ y < 0 \\ \textit{undefiniert} & x = 0,\ y = 0 \end{cases} \tag{18}$$



(a) Polarkoordinaten

(b) Addition

(c) Multiplikation

(d) Division

Abbildung 1: Geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen.

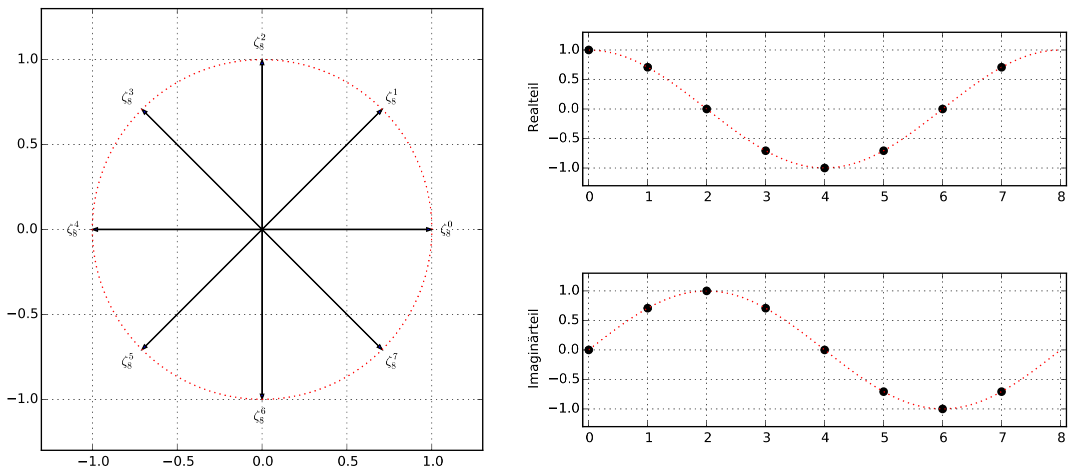


Abbildung 2: Visualisierung der 8-ten Einheitswurzel $\zeta_8^0, \ldots, \zeta_8^8$.

Addition und Subtraktion: Die Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen entspricht geometrisch der normalen Addition bzw. Subtraktion von Vektoren (Abbildung 1b).

Multiplikation: Sei $z = |z|\, e^{i\varphi}$ und $w = |w|\, e^{i\psi}$. Dann erhalten wir:

$$zw = |z| \cdot |w| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \tag{19}$$

Bei der Multiplikation werden also die Längen multipliziert und die Winkel addiert (Abbildung 1c).

Division: Sei $z = |z|\, e^{i\varphi}$ und $w = |w|\, e^{i\psi}$. Dann erhalten wir:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = \frac{|z|}{|w|}\, e^{i(\varphi-\psi)} \tag{20}$$

Bei der Division werden also die Längen durcheinander dividiert und die Winkel von einander subtrahiert (Abbildung 1d).

Konjugation: Die Konjugation entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

4 Einheitswurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{21}$$

Die Gleichung $z^n = 1$ hat in den komplexen Zahlen genau n Lösungen, welche durch die n-*ten Einheitswurzeln*,

$$\zeta_n^0, \zeta_n^1, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^n \tag{22}$$

gegeben sind.

Offensichtlicherweise sind die Zahlen ζ_n^i paarweise verschieden. Außerdem gilt:

$$\left(\zeta_n^i\right)^n = \left(e^{2\pi i/n}\right)^n = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1\,.$$

Durch die ζ_n^i sind also n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ gegeben. Sei nun umgekehrt w irgendeine Lösung der Gleichung $z^n = 1$. Dann ist $|w|^n = 1$ und damit $|w| = 1$. Das bedeutet, dass es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt mit $w = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Nach Voraussetzung ist $w^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi = 1$. Folglich ist also $\cos n\varphi = 1$ und $\sin n\varphi = 0$ und daher gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n\varphi = k \cdot 2\pi$. Weil $0 \le \varphi < 2\pi$ ist, folgt somit, dass $0 \le n\varphi < 2\pi n$ ist. Für k kommen also nur die Werte $0, \ldots, n-1$ in Frage.

5 Kanonisches Skalarprodukt für komplexe Zahlen

Der $\mathbb{C}^n$ ist mit den üblichen Definitionen für Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Das *kanonische Skalarprodukt* im $\mathbb{C}^n$ ist definiert als die Abbildung $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, welche durch

$$\langle z, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \ldots + z_n\bar{w}_n = \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k \tag{23}$$

gegeben ist. Das kanonische Skalarprodukt im komplexen unterscheidet sich also durch die komplexe Konjugation im zweiten Argument vom Skalarprodukt im reellen und hat für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften:

a) $\langle z + z', w\rangle = \langle z, w\rangle + \langle z', w\rangle$

b) $\langle \lambda z, w\rangle = \lambda\langle z, w\rangle$

c) $\langle z, w\rangle = \overline{\langle w, z\rangle}$

d) $\langle z, z\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

e) $\langle z, z\rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Aus c) mit a) und b) folgen außerdem:

f) $\langle z, w + w'\rangle = \langle z, w\rangle + \langle z, w'\rangle$

g) $\langle z, \lambda w\rangle = \bar{\lambda}\langle z, w\rangle$

Wegen d) induziert das kanonische Skalarprodukt eine Norm $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf dem $\mathbb{C}^n$:

$$z \mapsto \|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle}\,.$$

Diese ist identisch mit der Norm, welche durch das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ induziert wird.