

Aufgabenblatt 4 (Theorie)

wr@isg.cs.uni-magdeburg.de

SoSe 2018

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sind von jeder/m Studierenden *einzel*n zu bearbeiten und abzugeben (Plagiate werden entsprechend der Studienordnung geahndet).
- Bei allen Aufgaben muss ein nachvollziehbarer und vollständiger Lösungsweg angegeben werden.
- Empfehlenswert ist die Verwendung von LaTeX. Eingescannte handschriftliche (gut lesbare!) Lösungen oder die Verwendung anderer Textsatzsysteme sind auch möglich. Alle Abgaben sind im PDF Format einzureichen.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen in Form eines einzelnen PDF-Dokuments (max. 2MB) an die obige Emailadresse ein.

Aufgabe 1: Interpolation (6 Punkte)

Aufgabe 1.1: Polynom Interpolation (2 Punkte)

Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass man für die lineare Interpolation von zwei Punkten mithilfe der Vandermonde-Matrix und der Lagrangesche Interpolationsformel das gleiche Interpolationspolynom erhält.

- Geben Sie das lineare Interpolationsproblem für $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,1}$ mithilfe der Vandermonde-Matrix und durch die Lagrangesche Interpolationsformel an.
- Zeigen Sie nun die gesuchte Äquivalenz. Verwenden Sie gegebenenfalls, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.2: Spline Interpolation (2 Punkte)

Gegeben sei eine quadratische Funktion $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und Punkte $((x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_n, f(x_n)))$, $n \geq 2$, mit $x_i \in [a, b]$ und $x_i < x_{i+1}$. Zeigen sie, dass der quadratische Spline S mit der Randbedingung $S'(x_1) = f'(x_1)$ gleich der Funktion $f(x)$ ist.

Aufgabe 1.3: Approximation versus Interpolation (2 Punkte)

Gegeben sind folgende Punkte, siehe Abb. 1:

x	0.29	0.76	1.09	1.70	2.00	2.52	2.53
y	-1.46	-0.98	-0.34	1.78	2.48	5.11	4.92

Bestimmen Sie das globale Interpolationspolynom und die Lösung des quadratischen Ausgleichsproblems für diese Punkte. Stellen Sie die Ergebnisse zusammen mit den Datenpunkten in einem Plot graphisch dar und geben Sie diesen als Teil Ihrer Lösung ab (wählen Sie eine geeignete Skala für die y-Werte!). Diskutieren Sie anhand des Beispiels die Vor- und Nachteile von Approximation und Interpolation.

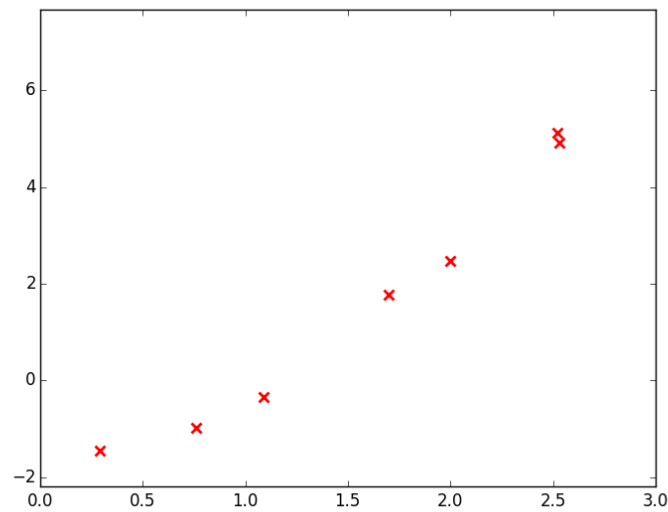


Abbildung 1

Aufgabe 2: Integration (4 Punkte)

Aufgabe 2.1: Gauss-Legendre Integration (2 Punkte)

Bei der Gauss-Legendre Integration werden die Stützstellen nicht äquidistant gewählt, sondern zusammen mit den Quadraturgewichten vorgegeben. Bestimmen sie Gewichte w_0, w_1 und zugehörige Stützstellen x_0, x_1 , sodass die Polynome $1, x, x^2$ und x^3 im Intervall $[-1, 1]$ exakt integriert werden, d.h. sodass gilt

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=0}^1 w_i x_i^k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

Sie dürfen dafür $x_0 \neq x_1$ und $w_0, w_1, x_0, x_1 \neq 0$ annehmen.