Wissenschaftliches Rechnen

Aufgabenblatt 2 (Theorie)

wr@isg.cs.uni-magdeburg.de

SoSe 2018

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sind von jeder/m Studierenden *einzeln* zu bearbeiten und abzugeben (Plagiate werden entsprechend der Studienordnung geahndet).
- Bei allen Aufgaben muss ein nachvollziehbarer und vollständiger Lösungsweg angegeben werden.
- Empfehlenswert ist die Verwendung von LaTeX. Eingescannte handschriftliche (gut lesbare!) Lösungen oder die Verwendung anderer Textsatzsysteme sind auch möglich. Alle Abgaben sind im PDF Format einzureichen.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen in Form eines einzelnen PDF-Dokuments (max. 2MB) an die obige Emailadresse ein.

Aufgabe 1: Eigen-Zerlegung (6 Punkte)

Aufgabe 1.1: Positiv-Definite Matrizen (2 Punkt)

Sei $M = A^T A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv semi-definite Matrix. Leiten Sie ausgehend von $z^T M z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^n$ eine Charakterisierung von positiv semi-definiten Matrizen anhand ihrer Eigenwerte her.

Aufgabe 1.2: Spezielle Eigen-Zerlegungen (1 Punkt)

Sei die Matrix $A_v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $A_v = vv^T$ für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Geben Sie explizit die Eigen-Zerlegung von A_v an und begründen Sie Ihre Antwort. Überlegen Sie sich ggf. zunächst, was die Abbildung A_v geometrisch bedeutet.

Aufgabe 1.3: Bestimmung von Eigenvektoren (1 Punkt)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und λ ein (bekannter) Eigenwert. Wie kann ein zugehöriger Eigenvektor numerisch bestimmt werden?

Aufgabe 1.4: Kommutierende Matrizen (1 Punkt)

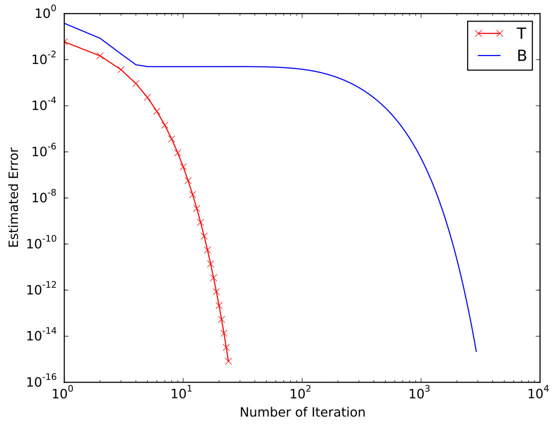
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei symmetrische Matrizen. Zeigen sie, dass die Matrizen kommutieren und $AB = BA$ gilt, wenn beide Matrizen die gleichen Eigenvektoren haben (welche aber i.A. mit unterschiedlichen Eigenwerten assoziiert sind).

Aufgabe 1.5: Potenzmethode (1 Punkt)

Gegeben sind die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 0.6552 & -0.3079 & -0.2479 \\ -0.3079 & 0.7251 & -0.2202 \\ -0.2479 & -0.2202 & 0.8098 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Für beide Matrizen wurde die Potenzmethode verwendet, um den ersten Eigenvektor zu bestimmen. Die folgende Abbildung zeigt das Konvergenzverhalten (Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Vektoren der Iteration) des Algorithmus:



Erläutern Sie das unterschiedliche Verhalten. Verwenden Sie gegebenenfalls Python um die Matrizen zu analysieren.

Aufgabe 2: Singulärwert-Zerlegung (4 Punkte)

Aufgabe 2.1: Pseudo-Inverse (2 Punkt)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix mit Singulärwert-Zerlegung $A = U\Sigma V^T$. Zeigen Sie, dass die Pseudo-Inverse $A^{-*} = V\Sigma^{-1}U^T$ auch die Inverse von A ist.

Aufgabe 2.2: Eigen-Zerlegung und SVD (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Singulärwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Wurzeln aus den Eigenwerten von A^TA und AA^T sind. Welche Eigenschaften der Singulärwerte lassen sich daraus ableiten?