Divergence Free Polar Wavelets

Christian Lessig Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg



Motivation

© Christian Lessig, 2018



B. Liu, G. Mason, J. Hodgson, Y. Tong, and M. Desbrun, "Model-reduced variational fluid simulation," ACM Trans. Graph., vol. 34, no. 6, pp. 1–12, Oct. 2015.

Incompressible Navier-Stokes equations:



Incompressible Navier-Stokes equations:

© Christian Lessig, 2018



Finite element approach:

© Christian Lessig, 2018



Finite element approach:

© Christian Lessig, 2018



Finite element approach:

© Christian Lessig, 2018



Finite element approach:



 $\int u_{ij} = 0, \ \forall i$

© Christian Lessig, 2018



 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





Incompressible Navier-Stokes equations:

© Christian Lessig, 2018



needs to be re-enforced after every time step

Incompressible Navier-Stokes equations in vorticity form:



Incompressible Navier-Stokes equations in vorticity form:



Representation of velocity and vorticity:

 $\omega(x) = \sum u_i \zeta_i(x)$ $i \in \mathcal{I}$





 $\omega(x) = \sum u_i \zeta_i(x) \qquad \nabla \times \vec{\phi}_i(x) = \zeta_i(x)$



© Christian Lessig, 2018



 $\omega(x) = \sum u_i \zeta_i(x) \qquad \nabla \times \vec{\phi}_i(x) = \zeta_i(x)$

$\nabla \cdot \phi_i(x) = 0$



© Christian Lessig, 2018

 $i \in \mathcal{I}$



 $\omega(x) = \sum u_i \zeta_i(x) \qquad \nabla \times \vec{\phi}_i(x) = \zeta_i(x)$



© Christian Lessig, 2018

 $\omega(x) = \sum u_i \zeta_i(x)$ $i \in \mathcal{I}$



 $\nabla \times \vec{\phi}_i(x) = \zeta_i(x)$

$\nabla \cdot \dot{\phi_i}(x) = 0$



© Christian Lessig, 2018

 $\omega(x) = \sum u_i \zeta_i(x)$ $i \in \mathcal{I}$



Enforces much of the intrinsic structure of imcompressible fluids

 $\nabla \times \vec{\phi}_i(x) = \zeta_i(x)$

$\nabla \cdot \dot{\phi_i}(x) = 0$

 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





 $\operatorname{Diff}(\mathcal{D})$





Fluid simulation • How to construct divergence free basis functions?

Fluid simulation How to construct divergence free basis functions?



$\nabla \cdot \vec{\phi_i} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{n} \cdot \vec{\phi_i} = 0$



Fluid simulation How to construct divergence free basis functions?

– Analytic form for simple geometries (square, disk, ...) Numerical computation for meshed domains

© Christian Lessig, 2018



$\nabla \cdot \vec{\phi_i} = 0$ and $\vec{n} \cdot \vec{\phi_i} = 0$

Fluid simulation Divergence free basis functions for unit square:



from T. de Witt, C. Lessig, and E. Fiume, "Fluid Simulation Using Laplacian Eigenfunctions," ACM Trans. Graph., vol. 31, no. 1, pp. 1–11, Jan. 2012.





Fluid simulation Fluid simulation using Laplacian eigenfunctions:


Fluid simulation

 Fluid simulation using Laplacian eigenfunctions: + Analytical divergence freedom + Efficient and simple (no pressure projection) + Plausible flows with few degrees of freedom

Fluid simulation - Fixed geometry

 Fluid simulation using Laplacian eigenfunctions: + Analytical divergence freedom + Efficient and simple (no pressure projection) + Plausible flows with few degrees of freedom

- Global support of basis functions (e.g. difficult to resolve turbulent details)

© Christian Lessig, 2018

How to construct a local divergence free representation for velocity?

© Christian Lessig, 2018

How to construct a local divergence free representation for velocity?

© Christian Lessig, 2018

How to construct a local divergence free representation for velocity? (that preserves all the other advantages)

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



Fourier

transform

$\vec{\xi} \cdot \hat{\vec{u}} = 0$

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



Fourier

transform

$\vec{\xi} \cdot \hat{\vec{u}} = 0$

E2 - - - ------ $---- \xi_1$

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



Fourier

transform

$\vec{\xi} \cdot \hat{\vec{u}} = 0$

E2 XXX 😿 🔭 🔭 🦎 🔭 🔨 🗸 + + + + **>>>** · · · · · and the second

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



Fourier

transform

$\vec{\xi} \cdot \hat{\vec{u}} = 0$

E2 - 🔭 🐂 🐂 🐂 🔺 🔹 + + + - 🥆 🔪 + + + · · · · · and the second

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



Fourier

transform





$\nabla \cdot \vec{u} = 0$



Fourier

transform





Divergence free basis:



Divergence free basis:



Divergence free basis:



Divergence free basis:



Divergence free basis:



Divergence free basis:

© Christian Lessig, 2018







 $\sum_{j=-1}^{\infty} |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 = 1$







 ∞ $\sum |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 = 1$

 $\forall \xi \in \mathbb{R}$

forms a tight frame in the spatial domain





 ∞ $\sum |\hat{\psi}_j(\xi)|^2 = 1$

forms a tight frame in the spatial domain





















$ih(|\xi|)\vec{e}_{\theta}$





$ih(|\xi|)\vec{e}_{\theta}$



$ih(|\xi|)\vec{e}_{\theta}$

Divergence free wavelets • Spatial representation:

 $\vec{\psi}(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} h(|\xi|) \,\vec{e}_{\theta} \, e^{i\langle\xi,x\rangle} \, d\xi$

Divergence free wavelets • Spatial representation:

Divergence free wavelets • Spatial representation:

 $\vec{\psi}(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} h(|\xi|) \left(\frac{\sin\theta}{-\cos\theta} \right) \, e^{i\langle\xi,x\rangle} \, d\xi$ Jacobi-Anger $e^{i\langle\xi,x\rangle} = \sum_{\sigma} i^m e^{im(\theta_{\xi}-\theta_x)} J_m(|\xi| |x|)$ formula: $m \in \mathbb{Z}$

$\vec{\psi}(\xi) = -ih(|\xi|) \vec{e}_{\theta}$

$\psi(x) = h_1(|x|)\vec{e}_{\theta}$

*	*		*	•	•	•	•	•	-		•			•	•	•			•	•	•	•	•
*	*	*	*	•		-	-	-	-	-	+		-	-	•	•	•	•	•	•	•	•	•
*	*	•	*		*	-	-	-	-	*	→ ·		*	*	*	•	•	•	*	•	*	•	•
	•	*	•	•	-	1		-	~	-					*	*	•	•	•	•	•	•	
•	*	•	*	1	1	1	*	-	-	-	$-\pi$						*	*	•	•	•	•	•
4	•	*	1	1	1	*	×		/									×	•	•	•	•	•
	•	•	1	1	1		1			-							X	X	×	×	•	•	
•	•	1	1	1	1	1				-								X	X	X	X	•	
	4	1	1	1	1	1													X	X	X	•	•
	1	1	1	1	1	1														X	X	x	•
•	•	1	1	1	1	1	1				/ -									¥	¥	x	•
•	•	t	1	1	1			7	1		1 -	- ×								¥	¥	+	
 	+	+	1	-						-	+	+								+	+	-+	
	+	†	• -	- / 7							× -				L	L	L	L	ĪT	J.	1	÷	
						- N - 1											Ζ,			V	V		
*	¥.	ł																		♥	¥	<i>i</i> .	
•	х х	4 4	4																↓ ↓	<!--</th--><th>¥ #</th><th>÷ ,</th><th></th>	¥ #	÷ ,	
•	4 4 4	4 4 8	4 4 4																↓ ↓ ↓	* * *	* * *	•	
•	•	4 4 1	4 4 4 4																* * *	* * *	* + +	* * *	
•	•	4 4 4	* * * *																* * * *	* * * *	* * *	•	
•	•	N N N N	* * * * *																	* * *	* * * * * * *	•	· · ·
•	•	N N N N	* * * * * * *																		* * * *	•	• • • •
•	•	N N N N	* * * * * * * *																		* * * *		· · ·
•	•	N N N N N N N N N N N N N N N N N N N																			* * * * * *		· · ·
· · · ·	•		* * * * * · · · · · · ·																		* * * * * * * *		· · · · · · · · · ·
· · · ·	•		* * * * * · · · · · · · · · · · · · · ·																		• • • • • • • • • •		· · · ·

69

$\vec{\psi_0}(x) = \vec{\psi}(2^0 x)$

															I														
•	•		•	•										•	-	-				•	•	•	•	•	•	•	•	•	
			•	•	•						-	-	-	-	-	-	-	•	•	•			•		•			•	
•	•	•			•	•	•		-	-	-	-	*	π	- *	*	*	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	,	
	•	•	*	•	•	1	•	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*				•	•	•	•	•	•	•	
•	•			•	•	1	1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			•	•	•		•	•	
•	•	•	•	•	•	1	1	*	*	*	*	*	*	*	+	*	•	*	*	*	*	•	•	•	•		•	•	
•	•	•		•	1	1	*	*	K		*	-					-	*	*	*	*	•	X		•	•	•	•	
•	•	,	•	1	1	*	*	*	1		÷	-	+	+	-	*	*	•	•	×	×	×	X	×	×	•	•	•	
•		,	,	1	+	*	*	1		1	*	ҝ	-	->	->			*	•	•	×	×	X	X	x	•	•	•	
•	•	,		+	+	¥	+		1	1	1	-			->-				×	x		×	X	×	x	•	•		
	•		•	+	*	*	+		1	1	1	1	1-		->`			\mathbf{X}	X	×		×	×	×	X	×	•	•	
	•		+	¥	¥	¥		+	1	1			1-							X	×	•	¥.	¥.	ł	¥	•	•	
			÷	+	÷	+		4				4								7	r								
								· ·	/												1	•		т	т				
		•	ŧ	÷	*	+		, ,	1					*							¥	•	+	•	t A	+		•	
 •	•	•	, →π	¥	+	+	•	+ +	/ /					*	× ×						+		+ +	↑ ↑	↑ ↑	, μ π	•	•	
 •	•	•	+ →π	+ + +	¥ •	+		, , , ,							*					¥ ¥	+ + + + +	•	+ + +	+ + +	* * *	+ π	•	•	
 •	•	•	+ →π +	¥ ¥ ¥	+ + +	÷ ÷		, , , , ,							×					 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 	* * *		+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + +	+ + +	+ π +	•	•	
	•	•	+ →π ,	+ + + +	+ + + +	+ + + +		+ + + +							×					¥ ¥ ¥	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	•	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + +	* * * *	τ π + +	•		
 • • • •	• • • •	•	+ →π + +	+ + + + + +	+ + - - 	+ + + - + - - + - - + 		* * * *												 ↓ ↓	* * *	•	+ + + + + +	+ + + + + + + + + + + + + +	* * * *	+ π + +	•		
• • • • •	• • • •	, , , , ,	+ →π ,	+ + + 	+ + + - + - + - + - + - + - + - + 			*													* * *	· · ·	+ + + + + + + + + + + + + + + +	* * *	* * *	+ 	•		
· · · ·	• • • • •	• • • • • • •	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	*			+ + + + + + + + + + + + +													* * * * * * * * * * *	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ + + + + + + + + + + + + + + + +	* * * * * *	*	π + + +	•		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + 				+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +													* * * *		· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •		* * * * * * * *	π π	•	· · · ·	
· · · · · · · · · ·	•	•	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	* * * * *				· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •													* * * *		· + + + + + + + + + + + + + + + + + + +			+ - - - - - -	•	· · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	•	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	* * * * * *				+ + + + · · · · · · · · · · ·													* * * * * * * * * * * * *		· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •			+ - - - - - - -	•	· · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +	* * * * * *				· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •													* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *					τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ	•	· · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ →π * * * * * * * * * * * * *	* * * * * * * * * *				+ + + + · · · · · · · · ·													* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *					τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ	•		
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ →π * * * * * * * * * * * * *	* * * * * * * * * * * * * * * * * * *				· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •													* * * * * * * * * * * * * * * * * *					τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ	•	· · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ →π * * * * * * * * * * * * *	• • • • • • • • • • • • • • •				· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •													* * * * * * * * * * * * * * * *					τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ →π * * * * * * * * * * * * *					· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •													* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *					τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ τ	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	

			•	•										-	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
				•							-	-	-	-	-	-	-	-		-	•		•	•	•	•	•	
		•	•	•	*	*	•	-	-	-	-	*	-	π	- +	*	-	-	•	•	•	•	•	•	•	•	•	,
				•		•	1	1	1	-	*	*	*	*	*	*	*	*	•	*		•	•	•	•	•	•	•
			•	•	•	•	1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	•	•	•	•	•	•	
*				•	1	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	•	8	•	•	•	•	•
		•		•	1	1	1	*	*	*	*	-				•	•	*	*	*	×	×	×	×	•	•	•	
			•	1	1	*	*	*	1	•		-	-	*	-	*	•		•	*	×	×	X	×	× .	•	•	,
•		,	•	1	1	*	*	1		1	1	*	-	->	->		*	*	*	•	×	X	X	X	X	×	•	•
	•			+	¥	¥	+		1	1	1		-						×	×	•	X	X	×	x	x	•	,
			+	+	1	1	*		1	1		Χ.	-							×		x	X	×	×	×.	•	•
	•		÷.	¥	*	*		1	1	1			1-							X	x	×	×.	×.	¥.	¥.	•	•
	•		÷	¥	+	+		1	1	1			A .			X					¥		ŧ.	٨	ŧ	4	•	•
											1	1				\				1								
			i i	Y		*		Ť	T	T	T	\mathcal{T}	7	1	×		1	1	*	*	¥		+	↑	↑	+	•	•
		•	 →π	+	+	*	•	↑ ↑						*	*					▼ ▼	↓		+	4 4	+ +	 π	•	•
•	•	•	 →π	* + +	¥ ¥	¥ ŧ	•	т † •						× ×	×					▼ ↓ ↓	↓ ↓ ↓		+ + +	+ + +	+	+ π	•	•
	•	•	→π ,	*	* * *	*	•	τ ↑ ト ×							*					▼ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	•	+ + + +	+ + + +	+ + + +	π ,	•	• • •
	•	9 1 1 1	→π ,	* * * *	¥ ¥ ¥	+ + 		* * * *												 ↓ ↓	¥ ¥ ¥		+ + + + +	+ + + + +	+ + + + + +	+ π + +	•	
	•	•	→π , ,	* * * *	* * * * *	+ + 		↑ ↑ × ·												* *	¥ ¥ ¥	•	+ + + + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + +	+ π + +	•	• • • •
· · ·	• • • •	•	→π + + +	• • • • • • •	* * * * *	+ + 		↑ ↑ × ×												 ✓ ✓	* * * *		+ + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + +	π , , ,	•	• • • •
· · · ·		•	→π * *	* * * * * *	*	* * * * * * * *		* * * * * * * * * * * * * * * * * * *												 ✓ ✓	* * * * *	· · · ·	+ + + + + + + + + + + + + + + +			+ π • •	•	• • • • •
· · · ·		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π • • •	* * * * * *	* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *			* * * * * * * *												 ✓ ✓	* * * * * * * * *		+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +			+ π + + + + + + + + + + + + + + + + + +	•	• • • • •
· · · · ·		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π * * *	*				* * * * * * * * * *												 ✓ ✓	* * * * * * * * * *		* * * * * * *			+ π + , ,	•	• • • • • •
· · · · ·	· · · ·	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π • • • •	*				* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *												 ✓ ✓	* * * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * *			+ π + , , ,	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · ·	· · · ·	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	*				* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *												 ✓ ✓	* * * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * * *			+ π + +	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	*				↑ ↑ ↑ ↑ × · · · × × × · · · ·												 ✓ ✓	* * * * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * * * *			+ π + +	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	*																 ✓ ✓	* * * * * * * * * * * * * * *					+ π + +		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	•	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π * * * * * * * * * * * * *	*																 ✓ ✓	* * * * * * * * * * * * * *					+ π + +		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	· · · · · · ·	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	→π * * * * * * * * * * * * *	*							TAXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX									 ✓ ✓	* * * * * * * * * * * * * *					+ π , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

$\vec{\psi}_0(x) = \vec{\psi}(2^0 x) \qquad \vec{\psi}_1(x) = \vec{\psi}(2^1 x)$

	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
	л. 	-
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		
	a construction of the second	\sim
	and the second	$\mathbf{x} = \mathbf{x} + $
		X X X X X X X X X X X X X X X X X X X
	and a second	$\overset{\bullet}{\not \hspace{0.1cm}}$
$-\pi$		$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
-π.		
$-\pi$		
$-\pi$		
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	π
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	π
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	

71

•			•	•											-	-	•			•	·	•		•		·	•	•	
•	*			•	•		•	•		-	-	-	-	-	-	-	-			•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•		•			•		•	-	-	-	-	*	+	π	_ +	+	-	-				•			•	•	•	,	
•		•		*	*	1	•	1	-	-	*	*	*	*	*	*	*	*					•	•	•	*	•	•	
•				•	•	*	1	1	1	*	*	*	*	*	*	•	*	*	*	*	*		•	•		•	•	•	
•					1	1	1	*	*	×	*	*	*	*	+	+	*	*	*	*	*	*		•	•	•	•	•	
•		•	•	•	1	1	1	*	*	*	*	-					-	*	*	*	*	×	×	×	•	•	•	,	
			•	1	1	*	*	*	*	-	•	-	+	-	-	*	*	•	•	*	×	×	×	×	•	•	•	•	
•			•	1	1	*	*	1		1	*	-	-	->	-			*		•	×	×	×	×	x	•	•	•	
•		,		+	*	+	+	1	1	1	1								×	× .	•	x	×	×	x	•	•	•	
				4	*	*	1		1	1	1		1						X	×		x	×	x	x	×	•	•	
			+	¥	¥	¥		1	1				1-							X	×		h	¥.	ł.	•	•	•	
			+	¥	¥	+		1					1								¥		ŧ	ł	ŧ				
													1.																
			+	+	¥	÷		¢						1	×						¥		+	ŧ	ŧ	+			
 •	•	•	+ →π	+	+	+	•	↑ ↑	/ /					/	*				<u> </u>	¥ ¥	+		+	↑	+	, π	•		
 •	•	•	+ →π	+ + + +	+ + +	+		4 4 4						*	*					¥ ¥	¥ + +		+	+ + +	+ + +	, π	•	•	
 •	•	•	+ →π +	¥ ¥ ¥	+ + + + + + +	4 4 4		+ + +						*	* *					¥ ¥ ¥	* * *		+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + +	+ + +	, π ,	•	•	
 •	•	•	+ →π +	¥ ¥ ¥	+ + + +	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	•	↑ ↑ ↓ ↓							×					¥ ¥ ¥	¥ ¥ ¥		+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + +	+ + + +	+ π +	•	•	
 •	•	•	+ →π + ,	+ + 	+ + + +	+		↑ ↑ ↓ ↓												 ↓ ↓	* * * * *		+ + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + +	+ + + +	π ,	•	•	
	•	•	+ →π + +	+ + + + + +	+	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +		↑ ↑ ↓ ↓												* * * *	* * *		+ + + + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + +	+ π + +	•	•	
	· · ·	•	+ →π ,	+ + + + + + - + - + - + - + 	+ + + + + + + + + + + + + + +	+ + 		* * * *												 ↓ ↓	* * * * * * *	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + + + + + + + +	+ + + + +	+ π , ,	•	•	
•	· · · ·	•	+ →π , , , ,	* * * * * *	+ + 			+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +												 ↓ ↓	*		*	+ +	*	+ π + + +	•	• • • • •	
•	· · · ·	•	+ →π * * *	+ + 	* * * * * * * *			* * * * * * * * * * * * * * * * * * *												 ↓ ↓	* * * * * * * * * *	· · · ·	* * * * *	* * * * *	+ + + + + + + + + + + +	+ π + + + + + + + + + + + + + + + + + +	•	· · · ·	
•	· · · ·	•	+ →π * * *	+ + + - - - - -	*			+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +													* * * * * * * * * * *	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	* * * * * *		* * * * *	+ π + + + + + + + + + + + + + + + + + +	•	· · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	•	+ →π * * *	+ + + - - - -				+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +												★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★	* * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * * * * *			+ π	•	· · · · ·	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · ·	•	+ →π * * * *	+ + + - - - -				+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +												★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★	* * * * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * * * * *			+ π	•	•	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	•	+ →π * * * * * * * * * * * * *	+ + + - - - - -				+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +												 ↓ ↓	* * * * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * * * * * *			+ π	•	•	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	+ →π * * * * * * * * * * * * *	+ + - - - - -				+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +		A A A A A A A A A A A A A A A A A A A										 ↓ ↓	* * * * * * * * * * * * * *		* * * * * * * * * * * * * * * * *			+ π	•	•	
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	•	+ →π * * * * * * * * * * * * *	+ + - - - - - -				* * * * * * * * * * * * * * * * * * *													* * * * * * * * * * * * *					+ π	•	•	

$\vec{\psi}_0(x) = \vec{\psi}(2^0 x)$ $\vec{\psi}_1(x) = \vec{\psi}(2^1 x)$ $\vec{\psi}_2(x) = \vec{\psi}(2^2 x)$

	.		· · · · · · π	
		, ,		
				• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
				* * * * * * * * * * *
				$[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
			A A A A A A A	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i$
		1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 - 1997 -	1 1 1 1 1 1 1	X X X X X X X X A REPORT OF
		a an	+ + + 1 1 1	
				🔁 🔏 🕺 🦞 v v v v v v v v v v v v v v v v v v
	· · · · ·			
· · · ·	$-\pi$	· · · · · ·		
· · · ·	$-\pi$ · · · · ·	· · · · · ·		$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
· · · ·	$-\pi \cdot \cdot$			π
· · · · ·	$-\pi$			
· · · · ·	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$\pi + \pi +$
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi\pi$			
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			$ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	$-\pi\pi$			
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	$-\pi\pi$			
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
	$-\pi$ \cdot			
	$-\pi\pi$			
	$-\pi\pi$			
	$-\pi$ · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			

						• • • • • • • • • • • •
				π	a a a a a a a a a	
		a na na na na na				
		a a a a a a a				
		a a a a a a a			a state a state of the	
					a a a a a construction of the second	
					A A A A A A A A A A A A A A A A A A A	
					ана с с с с с с с с с с с с с с с с с с	
		a a a construction a				
* * * * *						
a k s a s						
	· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · ·		· · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	-π	· · · · · · · · ·				π
		· · · · · · · · ·				
	$-\pi$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				π
	$-\pi$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			• •	π
	$-\pi$	· · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			• •	π
	$-\pi$	· ·			• •	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	· ·			· ·	π
	$-\pi$	N N			· ·	π
	$-\pi$	N N			• •	π
	$-\pi$	N N			• •	π
	$-\pi$	N N			• •	
	$-\pi$	N N			· ·	
	$-\pi$	N N			• •	
	$-\pi$	N N			· ·	
	$-\pi$	N N			· ·	
	$-\pi$	N N			· ·	
	$-\pi$	N N		$-\pi$	• •	
	$-\pi$	N N		$-\pi$		
	$-\pi$	N N		$-\pi$		
	$-\pi$	N N		$-\pi$		
	$-\pi$	N N		$-\pi$		
	$-\pi$	N N		$-\pi$		

72

 $\bullet \bullet \bullet$
																								~ ~				1	1								
× * *	4	+ +	1							1.1	Ň	X.		X									· K	K	X	4	11	1	1	, , , ,	4	+			4	i k	Ň
144	C.F.	11	1	1.1						4 A	×	$\mathbf{X}^{(1)}$		X	XX	(X)	**					~~	-	· K	K	Ċ¥.	11	1	1	1.1			•			•	X
XXX	1	11	1	1.1		•	•	• •		8 - A	X	X		×	*		**					~			× 1	C K	× +	1	1	1-1			• •		+	•	X
N N N	1	11	1	()		•	•	• •	\mathbf{r}	$\lambda = \lambda$	X	$\mathbf{X}^{(i)}$		×								~~			<u>_</u>	C K	× ×	1	1	1.1	. •	•	• •	•	•		- 8
<u> </u>	-	11	1	<u>, ,</u>		•	•	• •	1	1.1	×	\mathbf{N}_{i}				× * .									<u>_</u>	- 1	-	1	1	1.1	1	1	• •	•	•	•	
	1	1.1	1	• •		•	•	• •		÷		N (-			1	1	· · ·	1	•	• •	•		• •	
			1	• •		*	•	• •		• •		•		-		-	* *		~ ~						-	-		1	1	• •	1	•	• •	•		•	
		• •	1	· · · ·		1	•	• •		• •	•	1				-	* *	-	* *						-			1	1	• •	1	•	• •	•	*		1
	-	• •	1	• •	1	1			1	• •	1	1	• •	1	1	-		-		* *	* *	* *						1	•	• •	1		• •	•	•		1
	•	• •	•	• •	1		•		•			1	•	•	•	• •		1	• •				-			•	• •		1		1	1	· ·	1	•	• •	1
		• •	1	• •		•		• •								• •			• •	• •			•	• •					1			1	· ·		•		1
	•	• •	1	• •	1	•		• •	•			1				• •		1						• •		•	• •	•	•			1		Ċ.			1
				• •		•						1		1	-	-													1	• •	•	1		1		• •	
		1	÷						Ċ.		Ċ.	÷.		-													2.2		2		1	ĺ.			į.		
									1		÷.	1		1	2												2.2		2		-	÷					
_		2.2			÷.				÷		1	1		Ĩ.,														2	2		÷	2					
											1			<u>_</u>															2								
~ ~ ~									1		1			1		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	-	-				_			-					, ,							
~ ~ ~											1	1	1 1	4	1	11						_						1	1								
222		<u>, ,</u>	1						1	11	1	1	1 1	1	1	11	11					_			1		5.5	1	1		1		, .				
		1	N.						1	11	1	1	1 1	1	1	11	11	X					-					1	1		1	1	,		÷.,	1	
- N N N		11	1	× ×					4	1 1	1	1	1 1	1	1	11	11	X				-	-				55	1	1				ι.		÷.,		
		11	X	4.4					4	11	1	1	1 1	1	1	ÍŃ	11	1	11				5				11	1	1	i i	A.	1	÷ .		4.1	1	
- N N N	1	¥ ¥	X.	4.4	A.				+	1 1	4	1	1 1	1	1	ÍŃ	11	Í,	17			-				1	2.7		1	i i	×.		÷ .		4	1	
- N N N	1	11	N.	4 4					+	1 1	4	1	14	1	1	('_)	11	1	1 1			-	1		11	1	7.7	1	1	i i		+	γ.,		4	1	
- 7, 7, 7		£ £	¥.	+ +	¥.	κ.			+	+ 1	1	4	4 4	4	1	1'1'	11	1	1 1			1			11		t, t	1	¥ .	i i	+	+	۰.		4	1	
- 2, 2, 1		t t	1	+ +	÷	κ.			+	11	1	4	4 4	4	44	11	11	1	1 1	1-		23		1 V	1.1		t, t	1	\$.	i i	+	+	÷ .		1.	1	
		t t	¥.	1 1	÷			• •	+	1 1	1	4	4	4	44	1	44	1	1 1	1 -		1		4 ¥	1.1		t	1	\$ ·	i i	+	÷.	÷ .	•	1.	1	
		€ €	¥.	↓ ↓	÷.		•	• •	ŧ.	1			1 1	1	4 4	14	44	1	1 1	1 -		1		¥ ¥	11		t t	· •	¥ .	ŧ ŧ	•	+	۰. ا	•		1	
		• •		↓ ↓	ŧ.		•	• •	ł						A /			1	1 1	1.	S = X	1.1		5			¥ ¥			• •	•	+	ŧ			1	
		* *	1	• •	+	+	•	• •	ł	1									1 1	A	1.1	+							1	• •	•	+	ŧ.,			1	
		* *	+	∳ ∳	+		•	• •	ł	1			•		<u> </u>		¥ ¥	A.	X	× -	- 1	1					* *	1	1	↓ ↓	•	ŧ.	ŧ., i			E A	
		* *	+	+ +	+	1	•	• •	١.	1	1				<u>.</u>	¥. ¥.	N N	(\mathbf{k})		* *		11	1	ł. ł.	1.1		* *		1	ŧ †	•	+	ŧ., 1	•		F (†	
×		* *	*	+ +	1	1	•	• •	A.	1	1	1	t t	Ň	S.	۲.A	A. A			**		×1		1.1	1.1	ŀ. ¥.	¥. ¥.		1	• •	+	+	ŧ., 1	1		E Ł	
1. 1. 1		1. 1.	+	f +	1	1	•	• •	A.	1	1			Ň	N.	٢X.						× /		K K	1.1	· .	1. 1.		1	ŧ ŧ	+	1	£ _ ?	1		E A	
1. 1. 1		¥, ¥,	1	f f	÷.	1	•	5 - X	A.	1	1		1.1	N	<u>N 1</u>	1.1								K K	F.V	· /.	1, 1	, † ,	1	+ +	+	+	1.1	1		1	
- F _ F _ F		1.1	1	1-1	1	1	*	• •	A.	1	1		1.1	A.	5.	1.8							K	K K	××	E. K.	1. 1	1	1	¢	1	+	1 1	1		e A	
- F F F		1.1	1	11	1	1	1	•	A.	4	N			A.	<u>N 1</u>		**						K	KK	××	E.	¥, ¥,		1	¥ ¥	1	+	1.1	1	•	i k	
- K K K		11	1	1-1	1	1	1	• •	A.	1 1	N	N.		N.			* *							K	××	CV.	K K		1	\$ ¥	+	1	1.1	1	•	i k	
		11	1	1-1	1	*		• •	×.,	1 1	K	N		X			**					~			K	E.	K K		1	1 1	1	1	1.1		•	N.	
	C. K.	11	1	11	1	•		• •		1 1	N	X		X								~			K			×	1	11	1	1	1.1		•	× *	
		11	1	11	1	1		• •		1	X	1		X								~~				C K		1	1	/ /	1	1	1.1		•	× 8	
		/ /	1	1.1	1	1	1	• •		×	X	× 1		X								~~	~~			C K		1	1	/ /	1	1	1.1			- X	
			1	1.1			•	• •		1	Ň	1																1	1	11	1	1					
<u> </u>	-		1	· ·			• •	• •		1	1	\mathbf{N}_{i}		*												-	~ ~	1	1		1	1		1		•	
	-		1	• •			•	• •	•		1			-								-			-			1	1	• •	1	1	1	1			
	-		1	•	1	•	•	• •	1	• •	1	1				-			* *						-			1	1	• •	•	1	•		•	•	
* * *	-	• •	1	• •			•	• •	1	• •	1	•		1	1	-	* *			+ +		* *						1	1	• •		•	• •		•	• •	
	1	• •	•	• •		1	•		1	• •	1	1		1	1			-		* *								1	1	• •	1	1			•	•	
	•	• •	•	• •	•	•				1.1			• •		1	• •		1				• •	1		• •	• •	• •		•	• •	1	1			•		
		• •	•	• •		1				1.1		1				• •			• •	• •	· ·		•	• •					1	1	1				•	• •	
	•	• •	•	• •	•		•	• •	1			1	•	•				1					1		• •	•	• •		1				• •		•	• •	
	•	• •	•	• •		•	•	• •	1	· ·				1	1	-		-	* *	* *	* *	-		* *	-			-	1			1	• •	•	•		
			,	• •	1					• •		·		1	1														Ì			•	• •	•	•	• •	
		2.2	÷	· · ·	Ċ.				1		1	1		1	2										-		2.2	2	2		÷	÷			÷		
			2		1	1			1	1	1	1		1	2													2	2	· · ·	1				÷		
			2	· · ·		÷	2				1	1		1															2	5 - 5 5 - 5	1	2					
		22	2	· · ·					1	1	1	1		1	1	 												2	Š	· · ·		-					
		5.5	2	· · ·	1					1.1	1	1		1		11		-										5	\$	5 1 5 5	1	1					
1		11	1		1				1	1 1	4	4	1	4	1	11	1 -	1	-				-					5	\$	4 4 4 4		4					
			2	1 T	1				11	1.1	<u></u>	1		1	e [11											2.3	1	1	1 1	4	1.1	1			1	
1111	12	7 7	÷.	1 1			×	a 🛛 🕹		4 4	- 4	1	# -		1 1	7	77 1							× ×	- <u>X</u> - X	<u> </u>	X X		- b	7 r	- N		÷ -			4	



$\bar{\psi}_2(x) = \bar{\psi}(2^2x)$

	π	
$-\pi$		π
	$-\pi$	

Proposition: $\vec{u} \in \mathfrak{X}_{div}(\mathbb{R}^2)$

© Christian Lessig, 2018

 ∞ $\vec{u}(x) = \sum \left\langle \vec{u}(y), \vec{\psi}_{jk}(y) \right\rangle \vec{\psi}_{jk}(x)$ $j = -1 \ k \in \mathbb{Z}^2$

 $\vec{\psi}_{jk}(x) = \frac{2^j}{2\pi} \vec{\psi} \left(2^j x - k\right)$

Proposition: $\vec{u} \in \mathfrak{X}_{div}(\mathbb{R}^2)$

© Christian Lessig, 2018

 ∞ $\vec{u}(x) = \sum \left\langle \vec{u}(y), \vec{\psi}_{jk}(y) \right\rangle \vec{\psi}_{jk}(x)$ $i = -1 \ k \in \mathbb{Z}^2$

 $\vec{\psi}_{jk}(x) = \frac{2^j}{2\pi} \vec{\psi} \left(2^j x - k\right)$

Finer and finer vortices on finer and finer grids

© Christian Lessig, 2018



© Christian Lessig, 2018



© Christian Lessig, 2018









=-

© Christian Lessig, 2018



=(



	-	1	1	1		_	_	_	_					1	1	Т	1	1	1	1	I		
								-	-		5			-					~	1	2	-	_
	-		,	1	+	ł	1			-	-	1	1	1	Ŧ	ţ	V	1	1	1	1	+	-
			x	×	*	*			-		-		~	~	1	1	į	¥	X	X	X	1	-
+	+	*	1	1	+	÷	x	×	•	-	-	1	¥	÷	ŧ	A	X	X	×	*	A		-
-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	÷	•	8	¥	A.	X	X	X	X	×	*	1		-
1		1	1	1	×.	×.	*	1	*	+	-	1	1	1	1	+	+	+	Ň	1	1	T	-
	÷		Ì	Ì	Ì	Ì	Ì			Ţ	-	1	1	1	1	1	+	+	Ì	Ì	1		-
												Ĵ.	1	1	÷.	÷	÷	÷	÷	2	ľ		-
				-		-	-		-	-			2				÷	÷		,	Ţ		-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-		-		÷	÷	÷	+	Ļ		-
-	-	-	-	-	*	-	•	+	•	*	+	-	-	-	-	•	1	÷	+	t	¥	1	
•	-	•	•	1	•	1	*	•	*	*	*	*	1	*	1	1	1	1	1	+	Y		
	-			÷		-	-	-	-	-	2		Ĩ	-	Ì	Ì	1	1	÷	1	1		
	-	2	2	-		-	-	-	-	-	-	2	2		2		2	1	Å	*	ľ	4	
				2		-		-	+	-	-	+	-	+			2	1	x	X	Ţ	1	-
		-		-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-		\$	-	1	x	×	¥	1	-
•			1	•	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	•	*	-	1	×	٨	ł	1	-
•	•	•	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	-	*	1	X	X	ł	T	-
•	1	1	Ť.	Ĩ.	Ĩ.	Ĩ.	1	Ĵ	1	-	-	•	•	-	Ì	1	-	1	Č.	Č	¥ 		-
	1	<i>.</i> ,	1	1	1	1	Ĩ.	-	-	-	-	1	2		-	-	-	2			*		-
		,	1	1	1	1	2	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	4	4	-
		1	1	1	1	1	1	-	-	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	+	¥	1	
•	÷	1	1	1	1	*	-	-	*	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	÷	1	-
A	+	÷	1	1	1	*	*	*	*	+	*	+	+	+	+	*	*	+	+	-	1	-	-
4	÷.	+	1	1	1	1	1	1	1	+	+	+	•	1	1	1	1	-	-	1	1	2	-
+	*	1	*	*	1	1	1	2	1	-	-	-	2	2	Ĵ.	÷.	÷.	1		÷		7	_
1		ţ	1	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	~	×	χ.					_
X	ł	i	4	1	1	1	~	~	+	-	-	•	•	\mathbf{x}	x	x	+	÷		-		Å	_
+	-		•	+	+	+	-	-	-	-	-	->	-	-	-	-	+	+	+	+	-	x	_
		A	1	-		_	_	_	_	-	-												
1		1	~									F	-	-		~	~	K	1	÷	×.	*	-
1		/	× 	-										-	-	2	-	-	-	+	, 	`. 	
1		/	× 		0				-	1					-	2	-	-		+	` 3	`` ;	_
1		, ,	× 		0	+			-						-	2	+	+		+	3	`` ;	_
1	-	 	-		0										-	2		+ +		+ 	3	、 。 。	-
⊥ 1 - •		- + +														- 2 -				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		、 、 、 、 、 、	-
																2					3 3	• • • •	-
																+ 2 +				· - · · · · · · · · ·	3	× - - + +	-
																					E	- - + + +	-
																- 2 -							-
																2							-
																2							
																							-
																							-
																							-







Isotropic vortices are





© Christian Lessig, 2018











© Christian Lessig, 2018



 e_{θ}





© Christian Lessig, 2018



 e_{θ}





© Christian Lessig, 2018



 e_{θ}





© Christian Lessig, 2018

$\hat{\vec{\psi}}(\xi) = -i\,\hat{\gamma}(\theta)\,\hat{h}(|\xi|)\,\vec{e}_{\theta}$





© Christian Lessig, 2018

$\vec{\psi}(\xi) = -i\,\hat{\gamma}(\theta)\,\hat{h}(|\xi|)\,\vec{e}_{\theta}$ $\hat{\gamma}(\theta) = \sum \beta_m e^{im\theta}$ ${m}$







(ξ)

* * *	•						,				
* * *	-	-					<i>,</i>				
> -> ->	*	-									
> -> ->	*				•						
	*		•	•	•						
							,				
							÷				
• •									÷		
		÷									
					•	•	•	•	•	•	-
		•	•	•	•	*	•	•	•	*	
			•	•	•	•	•	•	•	•	8π
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
.		•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
· · ·			•	•	•	•	•	•	•	•	8π
			•	•	•	•	•	•	•	•	8π
				•	•	•	•	•	•	•	8π
					•	•	•	•	•	•	8π
				• • • • • • • • •	•	•		•	•	•	8π
					•				•		8π
						•		•	•		8π
						•		•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	8π
					•						8π
											8π





(ξ)

* * *	•						,				
* * *	-	-					<i>,</i>				
> -> ->	*	-									
> -> ->	*				•						
	*		•	•	•						
							,				
							÷				
• •									÷		
		÷									
					•	•	•	•	•	•	-
		•	•	•	•	*	•	•	•	*	
			•	•	•	•	•	•	•	•	8π
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
.		•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
· · ·	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	8π
· · ·			•	•	•	•	•	•	•	•	8π
			•	•	•	•	•	•	•	•	8π
				•	•	•	•	•	•	•	8π
					•	•	•	•	•	•	8π
				• • • • • • • • •	•	•		•	•	•	8π
					•				•		8π
						•		•	•		8π
						•		•		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	8π
					•						8π
											8π

 \mathcal{X}





Divergence free wavelets



<u>π</u>



Properties of directional divergence free wavelets: • Tight frame for $L_2^{\text{div}}(\mathbb{R}^2)$ Closed form expression in spatial domain Quasi-optimal approximation of discontinuities (under suitable assumptions)





).4

.2

error for upper half without directional wavelets







).4

0.2

error for upper half with directional wavelets



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3

© Christian Lessig, 2018



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^{2}



© Christian Lessig, 2018

$\vec{\psi}(\xi) = -i\,\hat{\gamma}(\theta)\,\hat{h}(|\xi|)\,\vec{e}_{\theta}$



Divergence free wavelets in $\mathbb{R}^{\cancel{2}}$



© Christian Lessig, 2018

$\vec{\psi}(\xi) = -i\,\hat{\gamma}(\theta)\,\hat{h}(|\xi|)\,\vec{e}_{\theta}$

ensures divergence freedom



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3

Proposition: Let $\vec{\tau}_i$ be the basis vector for the sphere for the longitudal coordinate for spherical coordinate w.r.t to the i-th axis. Then

© Christian Lessig, 2018



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3 • Divergence free wavelets:

 \wedge

© Christian Lessig, 2018

$\vec{\psi}^i(\xi) = \hat{h}(|\xi|) \vec{\tau}_i$



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3 Divergence free wavelets:

© Christian Lessig, 2018

$\hat{\psi}^i(\xi) = \hat{h}(|\xi|) \,\vec{\tau}_i$





Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3

 ξ_3





Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3

 ξ_3







Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3 • Divergence free wavelets:

© Christian Lessig, 2018

$\vec{\psi}^i(\xi) = \hat{h}(|\xi|) \vec{\tau}_i$


Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3 Divergence free wavelets:



© Christian Lessig, 2018

$\vec{\psi}^i(\xi) = \hat{\gamma}(\bar{\xi}) \,\hat{h}(|\xi|) \,\vec{\tau}_i$



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3 • Divergence free wavelets:

 $\vec{\psi}^i(\xi) = \hat{\gamma}(\bar{\xi}) \,\hat{h}(|\xi|) \,\vec{\tau}_i$ $\hat{\gamma}(\bar{\xi}) = \sum \gamma_{lm} y_{lm}(\bar{\xi})$ l,m



Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3 \circ Divergence free wavelets:

 $\vec{\psi}^{i}(\xi) = \hat{\gamma}(\bar{\xi}) \,\hat{h}(|\xi|) \,\vec{\tau}_{i}$ $\hat{\gamma}(\bar{\xi}) = \sum \gamma_{lm} y_{lm}(\bar{\xi})$ l,m





52

1.1









52

. . .





Divergence free wavelets in \mathbb{R}^3







113

^1



© Christian Lessig, 2018







52

1.1









1.1











Back to the motivation

© Christian Lessig, 2018



Divergence free wavelets

- \circ Tight frames for $L_2^{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n)$
- Isotropic and directional functions
- Closed form expression in spatial domain
- $^\circ$ Quasi-optimal approximation of boundary conditions (in \mathbb{R}^2 , under suitable assumptions)
- More details: <u>https://arxiv.org/abs/1805.02062</u>

I domain boundary assumptions) 05/1805.02062

